第12講 関数のグラフ
PART1 曲線の凹凸と変曲点

要点整理と公式

要点① 曲線の凹凸

関数 $f(x)$ が第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとする。

$f''(x)>0$

⟺「　　　」が増加

⟺ 曲線 $y=f(x)$ の「　　　　　　」が増加

⟺ 曲線 $y=f(x)$ は「　　　」

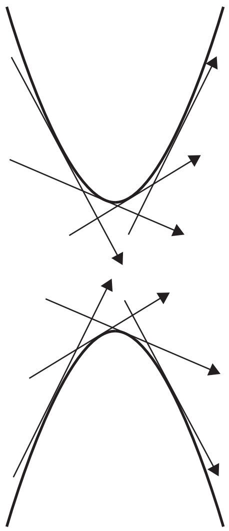
$f''(x)<0$

⟺「　　　」が減少

⟺ 曲線 $y=f(x)$ の「　　　　　　」が減少

⟺ 曲線 $y=f(x)$ は「　　　」

である。



曲線の凹凸

関数 $f(x)$ が第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき

$f''(x)>0$ となる区間では，曲線 $y=f(x)$ は下に凸

$f''(x)<0$ となる区間では，曲線 $y=f(x)$ は上に凸

要点② 変曲点

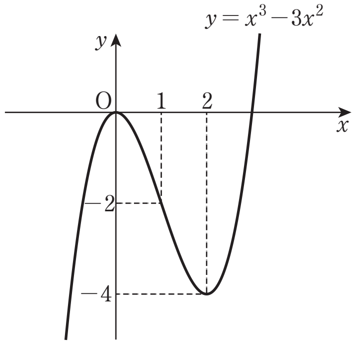
「　　　」･･･ グラフの凹凸が入れ替わる曲線上の点

(ex) $f(x)=x^3-3x^2$ について

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f''(x)=6x-6=6(x-1)$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$		0	
$f(x)$	に凸	-2	に凸



よって，点 $(1,\ -2)$ を境目に，グラフの凹凸が入れ替わっているので，点 $(1,\ -2)$ は変曲点である。変曲点について，以下のことが成り立つ。

変曲点

関数 $f(x)$ が第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき

$f''(a)=0$ のとき，$x=a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば，

点 $(a,\ f(a))$ は曲線 $y=f(x)$ の変曲点である。

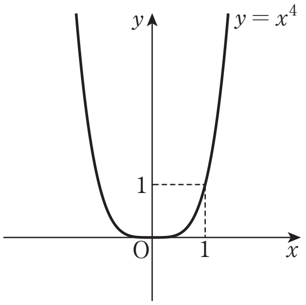
点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y=f(x)$ の変曲点ならば，$f''(a)=0$ であるが，$f''(a)=0$ であっても点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y=f(x)$ の変曲点とは限らない。

$f(x)=x^4$ において

$$f'(x)=4x^3$$

$$f''(x)=12x^2$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	下に凸	0	下に凸



よって，$f''(0)=0$ であるが，$x=0$ の前後で $f''(x)$ の符号は正のまま変わらない。したがって，点 $(0,\ 0)$ は曲線 $y=f(x)$ の変曲点ではない。

1 次の関数のグラフの凹凸を調べ，変曲点を求めよ。

(1) $y=x^4+x^3$

(2) $y=\log(x^2+1)$

Point Pickup

関数の凹凸と変曲点

関数 $f(x)$ が第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき

$f''(x)>0$ となる区間では，曲線 $y=f(x)$ は下に凸

$f''(x)<0$ となる区間では，曲線 $y=f(x)$ は上に凸

$f''(a)=0$　かつ　$x=a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば

点 $(a,\ f(a))$ は曲線 $y=f(x)$ の変曲点である。

点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y=f(x)$ の変曲点　$\Longrightarrow$　$f''(a)=0$

第12講 PART1 確認問題

1 関数 $f(x)=x^4-2x^3+3$ において，曲線 $y=f(x)$ が

下に凸となる区間は，ア

上に凸となる区間は，イ

である。また，変曲点は 2 点 (ウ，エ)，(オ，カ) である。

ただし，ウ ＜ オ とする。

ア，イ は下の①～④のうちから選べ。

① $0<x<1$　② $0<x<2$
③ $x<0$，$1<x$　④ $x<0$，$2<x$

2 関数 $f(x)=(x+2)\log x$ において，曲線 $y=f(x)$ が

下に凸となる区間は，キ

上に凸となる区間は，ク

である。また，変曲点は点 (ケ，f(ケ)) である。

キ，ク は下の①～④のうちから選べ。

① $0<x<1$　② $0<x<2$
③ $1<x$　④ $2<x$

第12講 関数のグラフ

PART1 曲線の凹凸と変曲点

1 次の関数のグラフの凹凸を調べ，変曲点を求めよ。

(1) $y=x^4+x^3$　　(2) $y=\log(x^2+1)$

[解答]

(1) $y'=4x^3+3x^2$

$y''=12x^2+6x=6x(2x+1)$

$y''=0$ とすると $x=0,\ -\dfrac{1}{2}$

よって，曲線の凹凸は以下。

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	下に凸	$-\dfrac{1}{16}$	上に凸	0	下に凸

したがって $x<-\dfrac{1}{2}$，$0<x$ で下に凸，$-\dfrac{1}{2}<x<0$ で上に凸

変曲点は点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{16}\right)$，$(0,\ 0)$

(2) $y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$

$y''=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$y''=0$ とすると $x=\pm 1$

よって，曲線の凹凸は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	上に凸	$\log 2$	下に凸	$\log 2$	上に凸

したがって $x<-1$，$1<x$ で上に凸，$-1<x<1$ で下に凸

変曲点は点 $(-1,\ \log 2)$，$(1,\ \log 2)$

第12講　PART1 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：③，イ：①，ウ：0，エ：3，オ：1，
カ：2

[解説]

$f'(x)=4x^3-6x^2$

$f''(x)=12x^2-12x$
$=12x(x-1)$

$f''(x)=0$ とすると，$x=0,\ 1$

よって，曲線 $y=f(x)$ の凹凸は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	下に凸	3	上に凸	2	下に凸

したがって，

下に凸となる区間は，$\boldsymbol{x<0,\ 1<x}$ [A]

上に凸となる区間は，$\boldsymbol{0<x<1}$

変曲点は，2点 $\mathbf{(0,\ 3),\ (1,\ 2)}$ [B]

[A]　曲線の凹凸
関数 $f(x)$ が第2次導関数 $f''(x)$ をもつとき，
$f''(x)>0$ となる区間では，
曲線 $y=f(x)$ は下に凸
$f''(x)<0$ となる区間では，
曲線 $y=f(x)$ は上に凸

[B]　変曲点
$f''(a)=0$ かつ $x=a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば，点 $(a,\ f(a))$ は曲線 $y=f(x)$ の変曲点である。

2

[正解] キ：④，ク：②，ケ：2

[解説]

$f(x)$ の定義域は，$x>0$

$$f'(x)=\log x+(x+2)\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\log x+1+\frac{2}{x}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$$

$$=\frac{x-2}{x^2}$$

$f''(x)=0$ とすると，$x=2$

よって，曲線 $y=f(x)$ の凹凸は次のようになる。

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f''(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	上に凸	$4\log 2$	下に凸

したがって，

下に凸となる区間は，$2<x$ [C]

上に凸となる区間は，$0<x<2$

変曲点は，$(2,\ 4\log 2)$ [D]

[C]　曲線の凹凸
関数 $f(x)$ が第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき，
$f''(x)>0$ となる区間では，
　曲線 $y=f(x)$ は下に凸
$f''(x)<0$ となる区間では，
　曲線 $y=f(x)$ は上に凸

[D]　変曲点
$f''(a)=0$ かつ $x=a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば，点 $(a,\ f(a))$ は曲線 $y=f(x)$ の変曲点である。